DOI: 10.30451/iaeee.605 **УДК 539.32**

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ УПРУГИХ ТЕЛ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ГРАДИЕНТА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Т.Б. Дуйшеналиев [(1)], А.С. Дуйшембиев [(1)], А.А. Орозбаев [(1)]

[(1)] *Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова*

Аннотация. *В преобразованиях пространства деформации определяются элементами и материального, и пространственного градиентов перемещения. Оба подхода считаются равноценными, хотя они не приводят к одинаковым результатам. Между тем, деформации не должны зависеть от способа их определения. В этой работе показано, что деформации должны определяться только элементами пространственного градиента перемещения.*

Ключевые слова*: градиент перемещения, деформация, напряжение, упругость.*

ELASTIC BODY SURFACES TRANSFORMATIONS BY DISPLACEMENT OF SPATIAL GRADIENT ELEMENTS

T.B. Duishenaliev [(1)], A.S. Duyshembiev [(1)], A.A. Orozbaev [(1)]

[(1)] *Kyrgyz State Technical University named after I.Razzakov*

Abstract. *In transformations, the deformation spaces are determined by the elements of both the material and the spatial gradients displacement. Both approaches are considered to be equivalent, although they do not lead to the same results. Meanwhile, deformations should not depend on the way they are determined. It was shown that the deformations should be determined only by the spatial gradient elements displacement in this article.*

Key words*: gradient of displacement, deformation, stress, elasticity.*

СЕРПИЛГИЧ ДЕНЕНИН ҮСТҮҢКҮ КАТМАРЫНЫН ОРУН КОТОРУУ МЕЙКИНДИК ГРАДИЕНТИНИН ЭЛЕМЕНТТЕРИ МЕНЕН КАЙТА ӨЗГӨРҮҮСҮ

Т.Б. Дуйшеналиев [(1)], А.С. Дуйшембиев [(1)], А.А. Орозбаев [(1)]

[(1)] *Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова*

Аннотация. *Мейкиндиктин кайра өзгөрүүлөрүндөгү бузулуулар орун которуунун материалдык дагы, мейкиндик дагы градиенттеринин элементтери менен аныкталат. Алар бирдей жыйынтыкка алып келбесе дагы эки мамиле тең бирдей деп эсептелет. Ошону менен катар эле бузулуу аны аныктоонун ыкмаларынан көз каранды болбоосу зарыл. Бул иште бузулуу орун которуунун мейкиндик градиеттеринин элементтери менен гана аныкталаары көрсөтүлгөн.*

Өзөктүү сөздөр*: орун которуунун градиенти, бузулуу, чыңалуу, серпилгичтик.*

В работе [1] получены соотношения между элементами материального и пространственного градиентов перемещения. Рассмотрим следующее преобразование (рис.1)

$$X_i = x_i - u_i \tag{1}$$

Функции перемещения u_i заданы или в виде $u_i(x_1, x_2, x_3)$, или в виде $u_i(X_1, X_2, X_3)$. Пусть эти функции и их производные до второго порядка непрерывны. В таком случае, преобразование (1) является однозначным. Это преобразование устанавливает однозначное соответствие между точками области v, описываемой координатами x_i, и точками области V, описываемой координатами X_i.

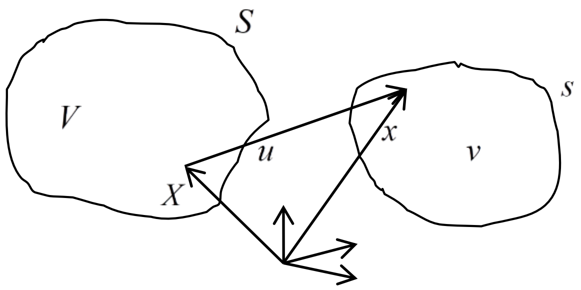


Рис.1. Преобразование векторами u_i области V в область v.

1. Определение деформаций элементами пространственного градиента перемещения [1]

Пространственный градиент перемещения:

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2}$$

На рис.2 указаны векторы перемещения в точках x и $x + dx$ области v, а также вектор относительного перемещения

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j \quad , \tag{3}$$

где $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$

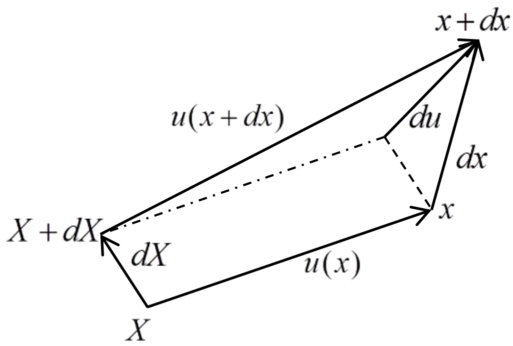


Рис.2. Векторы перемещения $u(x_1, x_2, x_3)$ *и* $u(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$,
и вектор относительного перемещения du.

Пусть $n_i = \dfrac{dx_i}{|dx|}$ - направляющие косинусы вектора dx, δ - тензор Кронекера, а $\alpha = \varepsilon_{ij} n_i n_j$. Разложим вектор (3) на векторы удлинения в направлении вектора dx и векторы сдвига и вращения, на плоскости, перпендикулярной к вектору dx

$$du_i = \alpha dx_i + (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\alpha) dx_j + \omega_{ij} dx_j \tag{4}$$

Из этого разложения можно определить величины относительной деформации удлинения α в направлении вектора dx и сдвига γ, а также модуль ϕ вектора относительного вращения:

$$\begin{aligned} &\alpha = \varepsilon_{ij} n_i n_j \\ &\gamma = \sqrt{(\varepsilon_{ki}\varepsilon_{kj} n_i n_j - \alpha^2)} \\ &\phi = \sqrt{\omega_{ki}\omega_{kj} n_i n_j} \end{aligned} \tag{5}$$

2. Определение деформаций элементами материального градиента перемещения

Материальный градиент перемещения

$$g_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \tag{2*}$$

Те уравнения, которые используются при этом, аналогичны уравнениям (3), (4).

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j = (\varepsilon'_{ij} + \omega'_{ij}) dX_j \ , \tag{3*}$$

где $\varepsilon'_{ij} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} + \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}), \quad \omega'_{ij} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} - \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j})$.

Пусть $n'_i = \frac{dX_i}{|dX|}$ направляющие косинусы вектора dX, а $\alpha' = \varepsilon'_{ij} n'_i n'_j$. Разложим вектор (3*) на векторы удлинения в направлении вектора dX и векторы сдвига и вращения, на плоскости, перпендикулярной к вектору dX.

$$du_i = \alpha' dX_i + (\varepsilon'_{ij} - \delta_{ij}\alpha')dX_j + \omega'_{ij}\, dX_j \ . \qquad (4^*)$$

Из этого разложения определяются величины относительной деформации удлинения α' в направлении вектора dX и сдвига γ', а также модуль ϕ' вектора относительного вращения:

$$\begin{aligned} &\alpha' = \varepsilon'_{ij} n'_i n'_j \\ &\gamma' = \sqrt{(\varepsilon'_{ki}\varepsilon'_{kj} n'_i n'_j - \alpha'^2)} \quad . \\ &\phi' = \sqrt{\omega'_{ki}\omega'_{kj} n'_i n'_j} \end{aligned} \qquad (5^*)$$

3. Достоверность приведенных положений

Отметим, что деформации можно определять и выражениями (5*), если в них в качестве ε'_{ij}, ω'_{ij}, n'_i внести следующие величины

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right),\ \omega'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right),\ n'_i = \left(\frac{dX}{|dX|}\right)_i = \left(\frac{(\delta - e)\cdot dx}{|(\delta - e)\cdot dx|}\right)_i . \qquad (9)$$

Эти уравнения нетрудно вывести из представления

$u_i = u_i(X_1(x_1,x_2,x_3), X_2(x_1,x_2,x_3), X_3(x_1,x_2,x_3))$

$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} dx_j = (\varepsilon'_{ij} + \omega'_{ij})dx_j$ и так далее.

3.1. Случай обратимых преобразований

Выберем любую точку области v и зададимся вектором dx, и определим деформации уравнениями (5). Эти же деформации определим и уравнениями (5*), внося в них выражения (9). Определения совпадут.

3.2. Случай необратимых преобразований

Пусть перемещения заданы в виде $u_i(X_1, X_2, X_3)$. Из-за необратимости, определения деформаций в точках области v по уравнениям (5) невозможно. Невозможно и определения этих деформаций и по уравнениям (5*), внося в них выражения (9).

Тут в любой точке X_i области V известны элементы материального градиента g. Элементы пространственного градиента e в соответствующей точке области v можно определить, пользуясь соотношениями [1]

$$e = g \cdot (\delta + g)^{-1}.$$

Далее по уравнениям (5) определим деформации. Для сравнения, эти деформации можно определить и по уравнениям (5*), внося в них соотношения (9). И здесь увидим полное совпадение.

4. Примеры

4.1. Одномерный случай

ℓ	L
$2 \le x \le 7$	$1 \le X \le 36$

$$x - X = u$$

$$X = (x-1)^2 \qquad x = 1 + \sqrt{X}$$

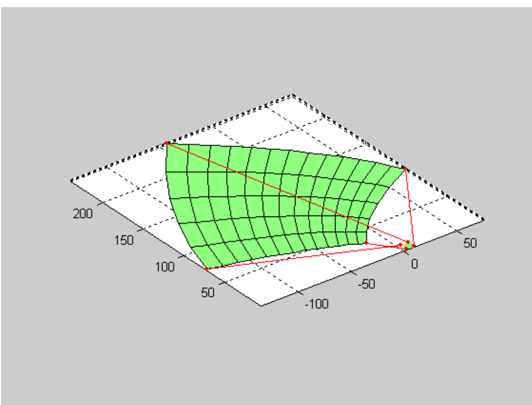
$$u = 3x - x^2 - 1 \qquad u = 1 - X + \sqrt{X}$$

$$\frac{du}{dx} = 3 - 2x \qquad \frac{du}{dX} = \frac{1}{2\sqrt{X}} - 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dX}\frac{dX}{dx}$$

$\frac{du}{dx} =$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11
$\frac{du}{dX} =$	-0.5	-0.667	-0.75	-0.8	-0.833	-0.857	-0.875	-0.889	-0.9	-0.909	-0.917
$\frac{du}{dX}\frac{dX}{dx} =$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11

4.2. Плоская задача



$$x - X = u$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} \dfrac{X_2}{\sqrt{-2X_1 + 2\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{-2X_1 + 2\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} -x_1^2 + x_2^2 + x_1 \\ x_2 - 2x_1x_2 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} \dfrac{X_2}{\sqrt{-2X_1 + 2\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}} - X_1 \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{-2X_1 + 2\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} - X_2 \end{pmatrix}$$

Определение деформации удлинения по уравнениям (5)

$$dx = \begin{pmatrix} .1 \\ -.2 \end{pmatrix} \qquad n = \frac{dx}{|dx|}$$

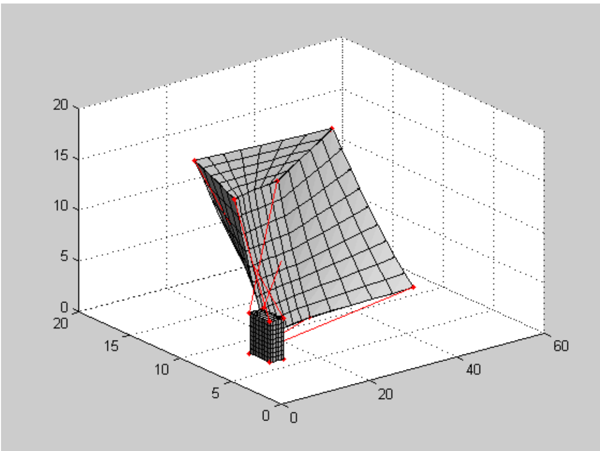
$\alpha(3,5) = -5$ $\alpha(3,12) = -5$ $\alpha(10,5) = -19$ $\alpha(10,12) = -19$

Определение деформации удлинения по уравнениям (5*)

$$X = x - u(x_1, x_2) \qquad dX = (\delta - e(x_1, x_2))dx \qquad n = \frac{dX}{|dX|}$$

$\alpha'(-16,30) = -.956$ $\alpha'(75,100) = -.96$ $\alpha'(-135,72) = -.99$ $\alpha'(-44,240) = -.98$

4.3. Трехмерное тело



$$x - X = u$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 + .6x_1x_2^2 \\ x_2 + .4x_1x_3 \\ x_3 - .2x_1x_2 + .2x_3^2 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} -.6x_1x_2^2 \\ -.4x_1x_3 \\ .2x_1x_2 - .2x_3^2 \end{pmatrix}$$

По уравнениям (5): По уравнениям (5*):

$$\alpha(2,2,3) = -.868 \qquad \alpha'(6.8, 4.4, 4) = -.644$$
$$\alpha(2,4,3) = -1.58 \qquad \alpha'(21.2, 6.4, 3.2) = -.794$$
$$\alpha(5,4,3) = -.776 \qquad \alpha'(53,10,.8) = -.803$$
$$\alpha(5,2,3) = -.431 \qquad \alpha'(17,8,2.8,2,3) = -.834$$

$$\alpha(2,2,7) = -2.115 \qquad \alpha'(6.8,7.6,16) = -.787$$
$$\alpha(2,4,7) = -2.827 \qquad \alpha'(21.2,9.6,15.2) = -.822$$
$$\alpha(5,4,7) = -2.024 \qquad \alpha'(53,18,12.8) = -.845$$
$$\alpha(5,2,7) = -1.678 \qquad \alpha'(17,8,16,14.8) = -.864$$

Литература

*1. **Дуйшеналиев Т.Б**. Неклассические решения механики деформируемого тела. – М.: Издательство МЭИ, 2017. – 400 с.*