DOI: 10.38054/iaeee-707 **УДК 519.633.2**

УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ СЕЛЕВОГО ПОТОКА

Б.Т. Мекенбаев(1), Б.С. Ордобаев(2), Ч.Т. Дуйшеналиев(2)

[1] *МУИТ, Бишкек, КР, mekenbt@mail.ru*
[2] *Кыргызско-российский славянский университет им. Б.Н. Ельцина, Бишкек, КР*

Аннотация. *Приведена модель трансформации одномерных уравнений мелкой воды над неровным дном к одному гиперболическому дифференциальному уравнению в частных производных. Решение дифференциального уравнения позволяет определить скорость и высоту потока жидкости над неровным дном. Показано, что скорость и высота потока соответственно описываются линейной и квадратичной зависимостью.*
Ключевые слова: *уравнения мелкой воды, поток жидкости, скорость, высота потока.*

SHALLOW WATER EQUATIONS FOR MOTION SIMULATION OF THE FLUID FLOW

B.T. Mekenbaev(1), B.S. Ordobaev(2), Ch.T. Duishenaliev(3)

[1] *IntUIT, Bishkek city, KR, mekenbt@mail.ru*
[2]*Kyrgyz-Russian Slavic University named after B.N. Yeltsin, Bishkek, Kyrgyz Republic*

Abstract. *The model for the transformation of one-dimensional shallow water equations over an uneven bottom to a hyperbolic partial differential equation in presented in this article. The solution of the differential equation makes it possible to determine the velocity and height of the fluid flow over an uneven bottom. It is shown that the velocity and height of the flow are respectively described by a linear and quadratic dependence.*
Key words: *shallow water equations, fluid flow, velocity, flow height.*

СЕЛ АГЫМЫНЫН КЫЙМЫЛЫН МОДЕЛДӨӨ ҮЧҮН МАЙДА СУУЛАРДЫ ТЕҢДЕШТИРҮҮ

Б.Т. Мекенбаев(1), Б.С. Ордобаев(2), Ч.Т. Дуйшеналиев(2)

[1] *ЭИТУ, Бишкек, КР, mekenbt@mail.ru*
[2] *Б.Н.Ельцин ат. Кыргыз-Орус славян университети, Бишкек, КР*

Аннотация. *Жеке өндүрүмдө бир гиперболикалык дифференциалдык теңдештирүүгө түбү тегиз эмес майда суулардын үстүн бирдей теңдештирүүнүн транцформациялоо модели келтирилген. Дифференциалдык теңдештирүү чечими түбү тегиз эмес суунун агымынын ылдамдыгын жана бийиктигин аныктоого мүмкүндүк берет. Агымдын ылдамдыгы жана бийиктиги талапка ылайык түз сызыктуу жана квадраттык экендигине карай катталаары көрсөтүлгөн.*
Өзөктүү сөздөр: *майда сууларды теңдештирүү, суюктуктун агымы, агымдын ылдамдыгы, бийиктиги.*

Уравнения мелкой воды, являясь системой нелинейных гиперболических уравнений, аппроксимируют полную систему уравнений Эйлера, описывающую течение несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле силы тяжести и широко используются для описания различных физических явлений. Нелинейный характер уравнений мелкой воды в случае неоднородной подстилающей поверхности означает, что использование аналитических методов решения может иметь успех только при очень специальных условиях и для их решения приходится использовать численные методы. В работах [1-4] получены основные частные решения для уравнений мелкой воды над наклонной плоскостью. Для решения данной проблемы использовались такие методы, как метод конечных разностей, метод расщепления, схема Годунова [5-8], поверхностный градиентный метод, метод дробных шагов [9] и др. В работе [10] рассмотрена система уравнений, описывающая одномерное движение мелкой воды над неровным дном. Там же показано, что эта система уравнений обладает замечательным свойством: в случае линейного профиля дна она линеаризуется точечной заменой переменных и ее решение сводится к решению системы линейных уравнений и построены точные решения для найденных случаев групповой классификации.

В работах [2-4] были получены аналитические решения для потока в наклонных каналах параболического сечения. Канал в поперечном сечении имеет параболическую форму $y(z)\sim|z|^m$. В этих работах показано, что уравнения мелкой воды, при течении потока над ровным дном (в горизонтальных и наклонных каналах) с учетом трения на дне или без трения, позволяют получить скорость потока, которая описывается линейным уравнением, а высота потока при этом описывается квадратичным уравнением.

Запишем одномерную нестационарную систему уравнений (уравнения Сен-Венана) течения мелкой воды над неоднородной поверхностью, задаваемой функцией $z = z(x, y)$ (рис.1) [1,2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial (hu)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} = g\alpha - \dfrac{dz}{dx} \end{cases}, \qquad (1)$$

где u - скорость потока, g - ускорение свободного падения, h - уровень жидкости над дном канала, $\mu = tg(\varphi)$ – коэффициент кулоновского трения, φ – динамический угол трения, $\alpha = \sin\theta - \mu\cos\theta$.

Используя известную зависимость [1,2,11],

$$c = \sqrt{gh} \qquad (2)$$

из системы уравнений (1) можно получить

$$\frac{\partial(u \pm 2c)}{\partial t} + (u \pm c)\frac{\partial(u \pm 2c)}{\partial x} = g\alpha - \frac{dz}{dx} \quad . \qquad (3)$$

Примем, что

$$\varepsilon = u \pm c \ . \qquad (4)$$

Уравнение (3) с помощью (4) представим в виде

$$\frac{\partial(u \pm 2c)}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial(u \pm 2c)}{\partial x} = g\alpha - \frac{dz}{dx} \qquad (5)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} \pm \left(\frac{\partial 2c}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial 2c}{\partial x}\right) = g\alpha - \frac{dz}{dx} \quad . \qquad (6)$$

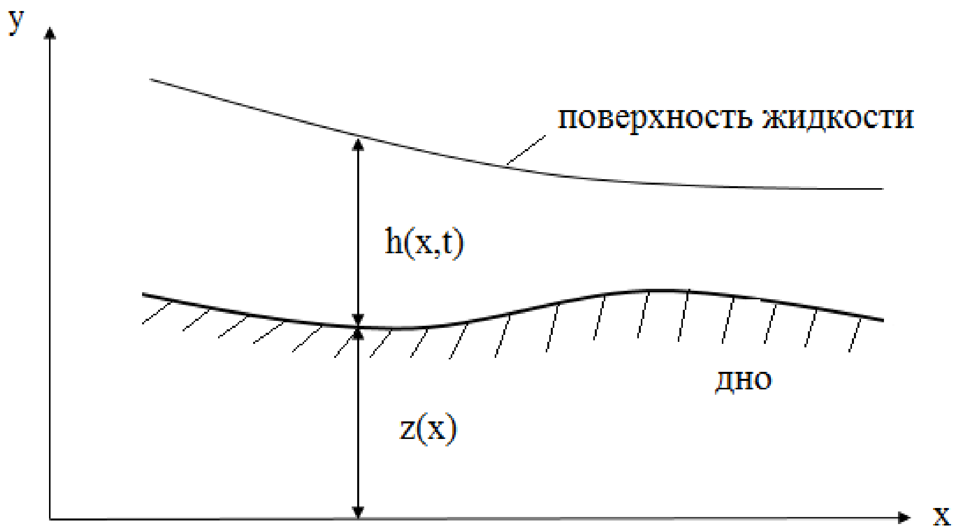

Рис.1. Геометрия задачи.

Приняв следующую функцию скорости

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{\partial(hu)}{\partial x}}{\dfrac{\partial h}{\partial x}} \qquad (7)$$

и, подставляя в уравнение неразрывности, систему уравнений (1) представим в следующем виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \ . \qquad (8)$$

Можно показать, что выражение внутри скобки в (6) равно нулю. Для этого обе части выражения (8) умножим на g и, используя (2), получим

$$\frac{\partial gh}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial gh}{\partial x} = \frac{\partial c^2}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial c^2}{\partial x} = 2c\frac{\partial c}{\partial t} + 2c\varepsilon\frac{\partial c}{\partial x} = c\left(\frac{\partial 2c}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial 2c}{\partial x}\right) = 0 .$$

Тогда (6) преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}=g\alpha-\frac{dz}{dx}. \qquad (9)$$

Подставляя уравнения (8) и (9) в систему уравнений (1), получим систему уравнений равновесия в виде

$$\begin{cases}(u-\varepsilon)\dfrac{\partial h}{\partial x}+h\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\ g\dfrac{\partial h}{\partial x}+(u-\varepsilon)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\end{cases}.$$

Из последней системы уравнений получаем известное выражение [1,2,11]

$$h=\frac{1}{g}(u-\varepsilon)^2 \qquad (10)$$

как закон сохранения импульса, т.е. второе уравнение системы уравнений (1), с помощью производных выражения (10)

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t}&=\frac{2}{g}(u-\varepsilon)\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right)\\ \frac{\partial h}{\partial x}&=\frac{2}{g}(u-\varepsilon)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)\end{aligned} \qquad (11)$$

представим в следующем виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}+(u-\varepsilon)\left(3\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)=g\alpha-\frac{dz}{dx}. \qquad (12)$$

Комбинировав уравнения (9), (12), окончательно получим

$$3\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=0 .$$

Проинтегрировав последнее, получим

$$u=\frac{2}{3}\varepsilon+f(t)+d . \qquad (13)$$

Здесь *f(t)* - некоторая произвольная функция, зависящая от *t*, а *d* – постоянная интегрирования.

Подстановка (13) в (10) позволит получить выражение для высоты потока

$$h=\frac{1}{9g}(3d-\varepsilon-f(t))^2. \qquad (14)$$

Используя производные функции высоты (11), уравнение (8) приводим к виду

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} . \qquad (15)$$

Вставляя (9) в правую часть выражения (15), получим уравнение для определения функции ε в следующем виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = g\alpha - \frac{dz}{dx} \quad . \tag{16}$$

Таким образом, система уравнений (1) сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных (16).

Начальные условия задачи: при $t = 0$, $u(x, 0) = u_0$, $h(x, 0) = h_0$. Используя (10), определим начальные условия для функции ε, т.е. $\varepsilon(x, 0) = \varepsilon_0$.

Скорость потока и ее высота определяются из зависимостей (13) и (14).

Таким образом, можно сделать следующие выводы: уравнения мелкой воды представлены в виде одного гиперболического дифференциального уравнения в частных производных (16) с соответствующими начальными условиями. Его решение позволит определить скорость (13) и высоту потока (14) жидкости, описываемых уравнением мелкой воды при наличии трения на неравном дне.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Петросян А.С.*** *Дополнительные главы теории мелкой воды // Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт космических исследований Российской академии наук (ИКИ РАН), Серия «Механика, управление и информатика» МОСКВА 2014. 64 С.*
2. ***Мекенбаев Б.Т., Дуйшеналиев Ч.Т.*** *Автомодельное решение динамики гравитационных потоков в наклонных каналах // Прикаспийский журнал Управление и высокие технологии. Астрахань. 2016, №3.*
3. **Zahibo, N., Pelinovsky, E., Talipova, T., and Nikolkina, I.** *The Savage-Hutter model for theavalanche dynamics in inclined channels: analytical solutions // J. Geophys. Res. – 2010. –Vol. 115, B03402. – doi:10.1029/2009JB006515.*
4. ***Петрухин Н.С., Пелиновский Е.Н.*** *Римановы волны в динамике оползней над плоским откосом // Современные проблемы науки и образования. - 2011. - № 6; URL: www.science-education.ru/100-5315.*
5. *Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С. К. Годунова. — М.: Наука, 1976.*
6. ***Eymard R., Gallouet T., Herbin R.,*** *The finite volume method. Handbook of Numerical Analysis, 2000, Vol. VII, pp. 713–1020.*
7. ***Друца А. В.*** *Конечно-разностные методы решения уравнений мелкой воды на неструктурированных сетках // Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Москва, 2013. 22 С.*
8. ***Годунов С. К.*** *Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб.,* ***47(89)****:3 (1959), С. 271–306.*

9. ***Marchuk G.I., Gordeev R.G., Rivkind V.Y., Kagan B.A.,*** *A numerical method for the solution of tidal dynamics equations and the results of its application, Journal of Computational Physics, 1973, Vol. 13, №1, pp. 15-34.*

10. ***Аксенов А. В., Дружков К. П.*** *Линеаризация одномерной системы уравнений мелкой воды над неровным дном // Научная сессия НИЯУ МИФИ–2014. Конференция «Теоретическая физика и математическое моделирование (прикладная математика)». Аннотации докладов. — НИЯУ "МИФИ" Москва, 2014. — С. 216–216.*

11. ***Дуйшеналиев Т.Б., Мекенбаев Б.Т., Макеева Ш.*** *Автомодельное решение уравнения мелкой воды // Наука, новые технологии Кыргызстана Бишкек, 2015, №4. 26-27 с.*