

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ЦИЛИНДРА В ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Мамедов Шакир Ахмед оглы⁽¹⁾, Гасанова Тукезбан Джафар гызы⁽²⁾

⁽¹⁾ Азербайджан, Баку, Архитектурно-Строительный Университет, Кафедра Испытание и сейсмостойкость сооружений, shakir-mamedov@rambler.ru

⁽²⁾ Архитектурно-Строительный Университет, Кафедра Испытание и сейсмостойкость сооружений, e-mail: atika2014@rambler.ru

Аннотация: Рассмотрена задача о движении вязкоупруго закрепленного жесткого цилиндра, сохраняющего вертикальное положение под действием набегающих поверхностных волн в жидкости. При этом учитывается возмущение падающей волны, вызванное присутствием цилиндра, который движется. Используется специальное разложение на падающей гармонической волне. Задача решается операционным методом. Для нахождения оригинала решением, учитывая, что знаменатель изображения представляет собой табличную функцию, используется интегральное уравнение Вольтера первого рода, которое решается численным методом.

Ключевые слова: жесткий цилиндр, сплошная среда, падающая волна, свободная поверхность, движение жидкости.

THE ASYMPTOTIC SOLUTION OF THE PROBLEM ON THE MOVEMENT OF THE CYLINDER IN LIQUID WITH THE FREE SURFACE UNDER THE INFLUENCE OF SEISMIC WAVES

Mamedov Shakir Ahmed⁽¹⁾, Hasanova Tukezban Jafar⁽²⁾

⁽¹⁾ Azerbaijan, Baku, Azerbaijan University of Architecture and Construction, Department "Testing and Seismic Stability of Constructions", shakir-mamedov@rambler.ru

⁽²⁾ Azerbaijan, Baku, Azerbaijan University of Architecture and Construction, Department "Testing and Seismic Stability of Constructions", atika2014@rambler.ru

Abstract: The problem regarding a movement of the rigid cylinder keeping vertical position under the influence of running superficial waves in a liquid is considered. The indignation of a falling wave caused by presence of the cylinder, which moves is thus considered. Special decomposition on a falling harmonious wave is used. The problem dares an operational method. For a finding of the original the decision, considering that the image denominator represents tabular function, Voltaire's integrated equation of the first sort, which dares a numerical method is used.

Keywords: rigid cylinder, the continuous medium, falling wave, free surface, liquid movement.

СЕЙСМИКАЛЫК ТОЛКУНДУН ТААСИРИ АСТЫНДА ЭРКИН ҮСТҮҢКҮ КАТМАРЛУУ СУЮКТУКТАГЫ ЦИЛИНДРДИН КЫЙМЫЛЫ ТУУРАЛУУ МАСЕЛЕНИН АСИМПТОТИКАЛЫК ЧЕЧИМИ

⁽¹⁾ Азербайжан, Баку, Архитектуралык-Курулуш Университети, Сыноо жана курулмалардын сейсмотуруктуулугу кафедрасы, shakir-mamedov@rambler.ru

⁽²⁾ Архитектуралык-Курулуш Университети, Сыноо жана курулмалардын сейсмотуруктуулугу кафедрасы, e-mail: atika2014@rambler.ru

Аннотация: Суюктуктагы үстүңкү толкундун басымынын негизинде тик абалын сактап калуучу илешчек серпилгич бекитилген катуу цилиндрдин кыймылы тууралуу маселе каралган. Ошол эле учурда кыймылдагы цилиндрдин болушу менен келтирилген кулаган толкундун козголоңу эске алынат. Кулаган гармониялык толкунга атайын бөлүштүрүүлөр колдонулат. Маселе операциялык ыкма менен чечилет. Чечимдин түп нускасын табуу үчүн түшүрүлгөн сүрөттүн бөлүмү өзүнө таблицалык функцияны алаарын эске алып, сандык ыкма менен чечилүүчү Вольтердин биринчи сандагы интегралдык теңдемеси колдонулат.

Өзөктүү сөздөр: катуу цилиндр, туташ чөйрө, кулаган толкун, эркин үстү, суюктуктун кыймылы.

Движение цилиндра в сплошной среде под действием волн рассмотрено в работе [1]. Задачи решаются операционным методом, при том оригиналы искомым функций ищутся численным определением полюсов комбинаций трансцендентных функций и вычислением несобственных интегралов.

Ниже используя специфичность задачи, решения строятся численным решением интегрального уравнения Вольтера первого рода, что не создает вычислительных проблем связанных с отысканием комплексных корней трансцендентных функций [2,3].

1. Постановка задачи.

Предполагается, что жесткий круговой цилиндр, расположенный в жидкости со свободной поверхностью возвышается над поверхностью жидкости и может двигаться в горизонтальном направлении. Движение жидкости рассматривается с точки зрения теории длинных волн [4].

Уравнение движения цилиндра имеет вид: (1)

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = P - \mu \frac{d\xi}{dt} - c\xi$$

где m - масса цилиндра, ξ - горизонтальное перемещение, P - усилие на цилиндр со стороны жидкости.

Давление жидкости на цилиндр в точках соприкосновения [4] равно

$$p_* = \rho g (\zeta - z) \quad (2)$$

где ρ - плотность жидкости, g - ускорение свободного падения, ζ - отклонение поверхности жидкости от первоначального положения, z - глубина.

Уравнение движения жидкости имеет вид:

$$a^2 \Delta \zeta = \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \quad (3)$$

где $a = \sqrt{gh}$, h — глубина жидкости, Δ - оператор Лапласа.

Сила, приходящаяся на единицу длины стержня равна

$$q = -r_0 \int_0^{2\pi} p \cos \theta d\theta \quad (4)$$

где θ - полярный угол, r_c - радиус цилиндра. Подставив выражение давления из

$$(2) \text{ в } (4) \text{ получим: } q = -\rho_0 g r_0 \int_0^{2\pi} (\zeta - z) \cos \theta d\theta \quad (5)$$

Величину ζ можно представить в виде: $\zeta =$

$$\sum \zeta_v \cos v \theta \quad (v = 1, 2 \dots) \quad (6)$$

Подставив (6) в (5), получим:

$$q = -\rho g r_0 \zeta_1 \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi - z \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right); \int_0^{2\pi} \cos \theta \cos v \theta d\theta = 0$$

при $v \neq 1$,

$$\text{или} \quad q = -\rho g \zeta_1 \pi r_0 \quad (7)$$

Граничным условием является [4]

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v_n}{\partial t} \quad (8)$$

где v_n - проекция скорости жидкости на нормаль к поверхности цилиндра.

Учитывая (6), условие (8) приводится к виду

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial r} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad (9)$$

$$v_n = v_x \cos \varphi$$

где v_x - скорость цилиндра $\left(v_x \Big|_{r=r_0} = \frac{d\zeta}{dt} \right)$

Изменение поверхности жидкости складывается из двух частей: результата падающей гармонической волны и возмущения, вызванного присутствием цилиндра, который, при том, движется, т.е.

$$\zeta = \zeta^P + \zeta^* \quad (10)$$

где $\zeta^P = bH(t)\sin(kx - \omega t)$

k - волновое число, ω - частота.

Возмущение поверхности жидкости ζ определяется волновым уравнением (3), решение которого в изображениях Лапласа-Карсона имеет вид:

$$\zeta^* = \sum_{i=0}^{\infty} D_i K_i \left(\frac{pr}{a} \right) \cos i \varphi \quad (11)$$

где K_i - функция Макдональда i - порядка.

Отклонение поверхности ζ^P на гармонической волне учитывая, что $x = r \cos \varphi$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \zeta^P &= bH(t) (\sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t) = \\ &= bH(t) \{ 2[J_1(kr) \cos \varphi - J_3(kr) \cos 3\varphi + J_5(kr) \cos 5\varphi - \dots] \cos \omega t + \\ & \quad [J_0(kr) - 2J_2(kr) \cos 2\varphi + 2J_4(kr) \cos 4\varphi - \dots] \sin \omega t \} \end{aligned} \quad (12)$$

где J_n - функция Бесселя.

Подставив (12) предварительно преобразовав по Лапласу-Карсону в (9), с учетом (6) получим:

$$\begin{aligned} & kb \left\{ 2[J_1'(kr_0) \cos \varphi - J_3'(kr_0) \cos 3\varphi + J_5'(kr_0) \cos 5\varphi - \dots] \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} + \dots \right. \\ & \left. + [J_0'(kr_0) - 2J_2'(kr_0) \cos 2\varphi + 2J_4'(kr_0) \cos 4\varphi - \dots] \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} \right\} + \\ & + \frac{p}{a} \left[D_0 K_0' \left(\frac{pr_0}{a} \right) + D_1 K_1' \left(\frac{pr_0}{a} \right) \cos \varphi + D_2 K_2' \left(\frac{pr_0}{a} \right) \cos 2\varphi + \dots \right] = -\frac{p^2}{g} \bar{\zeta} \cos \varphi \end{aligned} \quad (13)$$

Приравнявая коэффициенты при $\cos i \varphi$ в (13) можно написать (для $\cos \theta$)

$$-\frac{P^2}{g}\bar{\xi} = 2bkJ_1'(kr_0)\frac{p^2}{p^2 + \omega^2} + \frac{P}{a}D_1K_1'\left(\frac{pr_0}{a}\right) \quad (14)$$

Если длина цилиндра l_1 , то сила $P = ql$. На цилиндр действует сила волны расходящейся от него, т.е. на длине l :

$$\bar{P} = -\rho g \pi r_0 \cdot D_1 K_1 \left(\frac{pr_0}{a} \right) \cdot l \quad (15)$$

Подставив (15) в уравнение движения (1) в изображениях, получим

$$\bar{m}p^2\bar{\xi} = -\rho g \pi r_0 l D_1 K_1 \left(\frac{pr_0}{a} \right) - c\bar{\xi} - \mu p\bar{\xi} \quad (16)$$

Исключив из (14) и (16) D_1 , получим:

$$-p^2 \rho \pi r_0 l K_1 \bar{\xi} + \frac{\bar{m}}{a} p^3 K_1 \bar{\xi} = 2bk\rho g \pi r_0 l K_1 J_1' \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} -$$

$$-\frac{c}{a} p K_1' \bar{\xi} - \frac{\mu}{a} p^2 K_1' \bar{\xi},$$

Откуда

$$\bar{\xi} = \frac{\rho k J_1'(kr_0) K_1 \left(\frac{pr_0}{a} \right) \pi r_0 l}{\frac{c_1 l}{a} K_1' \left(\frac{pr_0}{a} \right) + \frac{\mu}{a} K_1' \left(\frac{pr_0}{a} \right) - \rho r_0 l K_1 \left(\frac{pr_0}{a} \right) + \frac{\bar{m}}{a} p K_1' \left(\frac{pr}{a} \right)} \cdot \frac{2bg}{p^2 + \omega^2} \quad (17)$$

Построенное решение в [] связано с определенными вычислительными трудностями. Для простой и быстрой оценки явления было бы полезным иметь упрощенные приближенные решения. С этой целью для малых времен можно использовать асимптотические формулы [] изображения решения (17), где принимается

$$K_n(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{27}} \cdot e^{-z} (|z| \gg 1)$$

Учитывая, что

$$K_1'(z) = -K_0(z) - \frac{1}{z} K_1(z),$$

Выражение (17) можно привести к виду

$$\bar{\xi} = \frac{-k\rho\pi r_0 J_1'(p^2)}{p^3 + \left(\frac{\mu}{m} + \frac{\rho r_0 a l}{m} + \frac{a}{r_0}\right)p^2 + \left(\frac{c}{m} + \frac{\mu a}{r m}\right)p + \frac{c a}{m r_0}} \cdot \frac{2bg}{p^2 + \omega^2} \quad (18)$$

Найдя корни кубического многочлена в (18), последнее можно представить в виде:

$$\bar{\xi} = \frac{Ap^2}{(p+d_1)[(p+a_1)^2+b_1^2](p^2+\omega^2)} \quad (19)$$

где $A = -k\rho\pi r_0 J_1'(kr_0)\rho^2$

$P_1 = -d_1$, $P_{2,3} = -a_1 \pm b_1$ – корни многочлена

Оригиналом (19) будет []:

$$\begin{aligned} \xi = & \frac{-d_1 e^{-d_1 t}}{(a^2 + d_1^2)[(a_1 - d_1)^2 + b_1^2]} + \frac{\sin(\omega t + \lambda)}{\sqrt{(\omega^2 + d_1^2)[(\delta^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2]}} + \\ & + \frac{1}{b} \sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{[(d_1^2 - a_1^2) + b_1^2][(v^2 - \omega^2) + 4a_1^2\omega^2]}} e^{-at} \cdot \sin(b_1 t + \mu) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{d_1} - \operatorname{arctg} \frac{2a_1\omega}{\delta^2 - \omega^2}$$

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{-b_1}{a_1} - \operatorname{arctg} \frac{b_1}{d_1 - a_1} - \operatorname{arctg} \frac{2b_1 a_1}{a_1^2 - b_1^2 + \omega^2}$$

$$\delta^2 = a_1^2 + b_1^2$$

На рисунке 2 приведен график движения цилиндра.

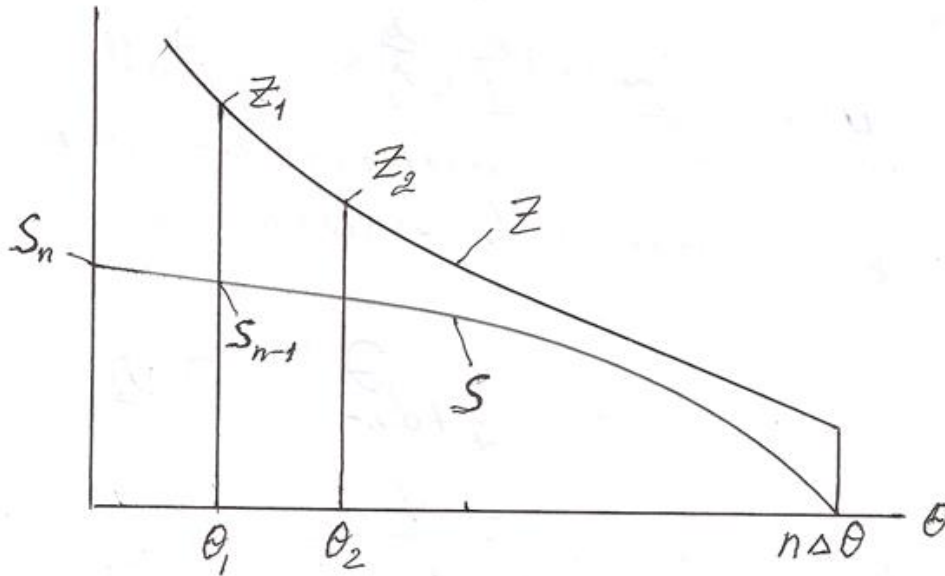


Рис.2. График движения цилиндра

Рассмотрим пример.

$$a = 10 \text{ м/с}; \quad m = 10 \text{ кг}; \quad r_0 = 0,2 \text{ м}; \quad \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$l = 0,4 \text{ м}; \quad c = 10^2 \text{ Н/м}; \quad \mu = 5 \text{ кг/с}$$

Знаменатель в (19) примет вид:

$$(p^3 + 130,5p^2 + 125p + 5000)(p^2 + \omega^2)$$

или найдя корни первого сомножителя:

$$p_1 = -129,84; \quad p_{2,3} = -0,33 \pm 6,181i;$$

Определим значения параметров в (20):

$$d_1 = 129,84; \quad a_1 = 0,33; \quad b_1 = 6,181$$

Рассмотрим пример

$$a = 10 \text{ м/с}; \quad m = 10 \text{ кг}; \quad r_0 = 0,2 \text{ м}; \quad \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$l = 0,4 \text{ м}; \quad c = 10000 \text{ Н/м}; \quad \mu = 5 \text{ кг/с}$$

Знаменатель в (19) примет вид:

$$(p^3 + 130,5p^2 + 1025p + 50000)(p^2 + \omega^2)$$

или найдя корни первого сомножителя:

$$p_1 = -125,4; \quad p_{2,3} = -2,5 \pm 20,59i;$$

Определим значения параметров в (20):

$$d_1 = 125,4; \quad a_1 = 2,5; \quad b_1 = 20,59$$

Рассмотрим пример

$$a = 10 \text{ м/с}; \quad m = 200 \text{ кг}; \quad r_0 = 0,2 \text{ м}; \quad \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$l = 0,4 \text{ м}; \quad c = 10000 \text{ Н/м}; \quad \mu = 5 \text{ кг/с}$$

Знаменатель в (19) примет вид:

$$(p^3 + 54p^2 + 51,25p + 2500)(p^2 + \omega^2)$$

или найдя корни первого сомножителя:

$$p_1 = -25,31; \quad p_{2,3} = -13,9 \pm 42,4i;$$

Определим значения параметров в (20):

$$d_1 = 25,31; \quad a_1 = 13,9; \quad b_1 = 42,4$$

На **рисунке представлен** график зависимости перемещения χ от времени при $\beta=4$: на колебания цилиндра с большим периодом, отвечающим упругому закреплению наложены колебания с меньшим периодом, вызванные частотой волн в жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Форрестол М.Ж., Альзхеймер Б.Е.** Неустановившееся движение жесткого цилиндра под действием упругих и акустических волн. Прикладная механика. Серия E, ASME, 1968, с.278-283.

2. **Кубенко В.Д., Панасюк Н.Н.** Действие нестационарных волн на цилиндрические тела в сжимаемой жидкости. Прикладная механика, 1973, т.9, в.12. с.77-82.

3. **Агаларова Т.Д.** Взаимодействие акустической волны с осциллятором. Сборник научных трудов по механике, №7, Баку, 1997. с.181-184.

4. **Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.** Теоретическая гидромеханика. Изд. техн.-теор. лит. Москва. 1955., с.509-513.

5. **Диткин В.А., Прудников А.П.,** Справочник по операционному исчислению. Высшая школа, М.1965.

6. **Грей Э. и Мэтьюз Г.Б.** Функции Бесселя и их приложения. И.Л.Москва, 1949.

REFERENCES

1. **Forrestol M. Zh., Alzkheymer B. E.** The unsteady movement of the rigid cylinder under the influence of elastic and acoustic waves. Applied mechanics. Series E, ASME, 1968, page 278-283.

ВЕСТНИК МЕЖДУНАРОДНОЙ АССОЦИАЦИИ ЭКСПЕРТОВ ПО СЕЙСМОСТОЙКОМУ
СТРОИТЕЛЬСТВУ

2. **Kubenko V.D., Panasyuk N. N.** *Action of non-stationary waves on cylindrical bodies in the compressed liquid. Applied mechanics, 1973, t.9, 12. page 77-82.*

3. **Agalarova T.J.** *Interaction of an acoustic wave with the oscillator. The collection of scientific works on mechanics, No. 7, Baku, 1997. page 181-184.*

4. **Kochin N. E., Kibel I.A., Roze N.V.** *Theoretical hydromechanics. Prod. tech. - theor. lit. Moscow. 1955., page 509-513.*

5. **Ditkin V.A., Prudnikov A.P.,** *Reference book on operational calculation. The higher school, M.1965.*

6. **Grey E., Metyuz G.** *Bessels functions. Moscow, 1949.*