

DOI:10.38045/iaeee-403

УДК 539.3, 531.1

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МАССИВА В ОКРЕСТНОСТИ ОЧАГА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

Т.Б. Дуйшеналиев<sup>(1)</sup>, Б.Т. Сарсенов<sup>(2)</sup>, Т.Т. Мамытов<sup>(3)</sup>

<sup>(1)</sup> КГТУ им. И.Раззакова, г. Бишкек, КР, [duishenaliev@mail.ru](mailto:duishenaliev@mail.ru)

<sup>(2)</sup> Институт математики и математического моделирования МОиН, г. Алматы, РК

<sup>(3)</sup> ОАО «Нарынгидроэнергострой», г. Кара-Куль, КР

**Аннотация:** Для исследования состояния земной поверхности, обусловленного сбросом тектонических напряжений на глубинных трещинах в земной коре при землетрясениях, с использованием основных уравнений линейной теории упругости поставлена модельная нестационарная краевая задача дифракции волн в упругом полупространстве при сбросе напряжений на горизонтальной трещине.

## MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS OF THE MASSIF IN THE AREA OF THE SEISMIC FOCUS

T.B. Duishenaliev<sup>(1)</sup>, B.T. Sarsenov<sup>(2)</sup>, T.T. Mamytov<sup>(3)</sup>

<sup>(1)</sup> KSTU named after I. Razzakov, Bishkek, Kyrgyzstan, [duishenaliev@mail.ru](mailto:duishenaliev@mail.ru)

<sup>(2)</sup> Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of MES RK, Almaty, Kazakhstan

<sup>(3)</sup> JSC "Naryngidroenergostroy", Kara-Kul, Kyrgyzstan

**Abstract:** For the research of the Earth's surface caused by the reset of tectonic stress on the deep cracks in the earth's crust during earthquakes, using basic equations of linear elasticity model is set unsteady boundary problem of diffraction of waves in an elastic half-space at reset stress on the horizontal crack.

## ЖЕР ТИТИРӨӨНҮН ОЧОГУНУН АЙЛАНАСЫНДАГЫ МАССИВДИН ДИНАМИКАСЫНЫН МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛИ

Т.Б. Дуйшеналиев<sup>(1)</sup>, Б.Т. Сарсенов<sup>(2)</sup>, Т.Т. Мамытов<sup>(3)</sup>

<sup>(1)</sup> И.Раззаков ат. Кыргыз мамлекеттик техникалык университети, Бишкек ш., КР, [duishenaliev@mail.ru](mailto:duishenaliev@mail.ru)

<sup>(2)</sup> Казакстан Республикасынын ББЖИМ Математика жана математикалык моделдөө институту, Алматы ш., РК

<sup>(3)</sup> «Нарынгидроэнергострой» АК, Кара-Көл ш., КР

**Аннотация:** Жердин үстүңкү кыртышынын абалын изилдөө үчүн жер титирөөлөрдө жер кыртышындагы терең жаракалардагы тектоникалык чыңалууларды түшүрүү менен шартталган, серпилгичтиктин түз сызыктуу теориясынын негизги теңдештирүүлөрүн колдонуу менен туурасынан жараканда чыңалууну түшүрүүдө серпилгич жарым алкактагы толкундардын дифракциясына стационардык эмес моделдик маселе коюлган.

**Постановка задачи.** Пусть упругая изотропная среда  $D$  (рис.1) с коэффициентами Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$  и плотностью  $\rho$  занимает полупространство  $x_1 \geq 0$ . Рассмотрим динамику

среды в условиях плоской деформации при сбросе напряжений на горизонтальной трещине  $S$ , которая расположена на глубине  $L$  ( $x_1=L, |x_2|\leq d$ ).

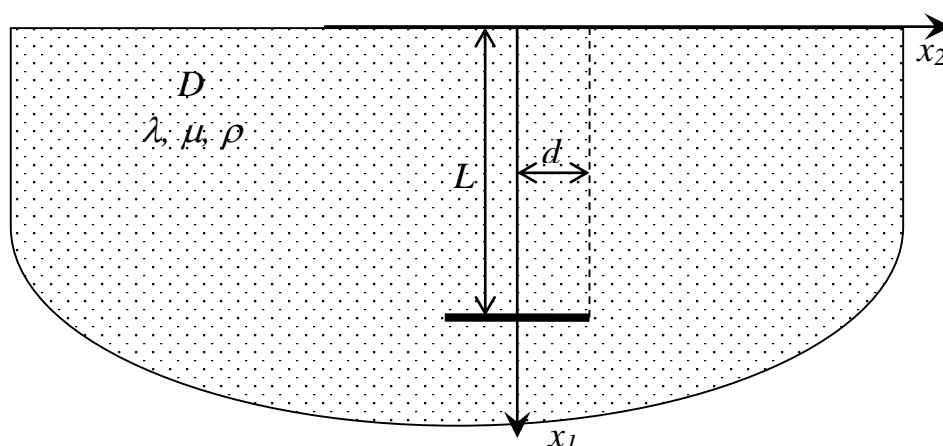


Рис. 1. Полуплоскость с горизонтальной трещиной (расчетная схема)

Предполагается, что в начальный момент среда покоится:

$$\mathbf{u} = 0, \dot{\mathbf{u}} = 0 \text{ при } x_1 \geq 0,$$

а граница полупространства (*дневная поверхность*) свободна от внешних нагрузок:

$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$  при  $x_1 = 0$ . Здесь и далее  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  – перемещения среды,  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,  $x_i$  – координаты точек среды  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $t$  – время. Индексами после запятой обозначаются частные производные по декартовым координатам, а точкой сверху – частные производные по времени.

Так как на бесконечности отсутствуют источники колебания, то очевидным является требование, чтобы на бесконечности выполнялись условия затухания:

$$u_j \rightarrow 0, \sigma_{ij} \rightarrow 0 \text{ при } \|x\| \rightarrow \infty.$$

Перемещения среды удовлетворяют уравнениям движения:

$$\sigma_{i\beta,\beta} + F_i = \rho \dot{v}_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где  $v_i$  – компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$ ;  $F_i$  – проекции объемной силы на соответствующие координатные оси. Здесь и далее по повторяющимся греческим индексам в произведении выполняется суммирование (тензорная свертка), а по повторяющимся латинским индексам суммирования нет.

Связь между компонентами тензора напряжения и компонентами вектора перемещения выражается законом Гука :

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{\beta,\beta} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, \quad (2)$$

Сброс напряжения на трещине выражается через компоненты  $F_i$  объемной силы  $F$  и определяются сингулярной обобщенной функцией – простым слоем на трещине  $S$ . Здесь они имеют следующий вид:

$$F_i = n_\beta [\sigma_{i\beta}]_S \delta(x_1 - L) H(d - |x_2|), \quad i, \beta = 1, 2 \quad (3)$$

где выражение в квадратных скобках – скачок компонент тензора напряжений на берегах трещины,  $n$  – единичная нормаль к ее поверхности,  $H(x_1)$  – функция Хевисайда,  $\delta(x_1)$  – функция Дирака,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Предполагается, что скачок напряжений на трещине известен.

Требуется определить напряженно-деформированное состояние среды и дневной поверхности при сбросе напряжений на трещине.

**Бихарактеристики и условия на них.** Решение задачи удобно искать в безразмерных переменных. Вводятся независимые переменные и искомые величины :

$$\bar{t} = \frac{tc_1}{L}; \quad \bar{x}_i = \frac{x_i}{L}; \quad \bar{v}_i = \frac{1}{c_1} \frac{\partial u_i}{\partial t}; \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho c_1^2}; \quad \bar{F}_i = \frac{F_i L}{\rho c_1^2};$$

где  $c_1, c_2$  - скорости распространения объемных и сдвиговых волн в упругой среде,  $L$  - характерная длина. В дальнейшем черта над безразмерными параметрами опускается.

Уравнения движения (1) и производные по времени от соотношений закона Гука (2) в безразмерных величинах имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{v}_i = \sigma_{i\beta, \beta} + F_i \\ \dot{\sigma}_{ij} = \gamma_{ij} v_{i,j} + \gamma_{33} (v_{\beta, \beta} - v_{i,j}) \delta_{ij} + \gamma_{ji} v_{j,i} (1 - \delta_{ij}) \end{cases} \quad (i, j, \beta = 1, 2), \quad (4)$$

где  $\bar{\gamma}_{12} = \bar{\gamma}_{21} = (c_2/c_1)^2$ ;  $\bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{22} = 1$ ;  $\bar{\gamma}_{33} = 1 - 2\bar{\gamma}_{12}$ . Для получения уравнения бихарактеристик и условий на них, расщепляем двухмерную систему (4) на одномерные. Это можно выполнить, если в системе (4) поочередно зафиксировать одну из пространственных переменных (рис. 2).

При  $x_i = const$  ( $i \neq j$ ) имеем:

$$\begin{cases} \dot{v}_i - \sigma_{ij,j} = a_{ij} + F_i \\ \dot{\sigma}_{ij} - \lambda_{ij}^2 v_{i,j} = b_{ij} \end{cases} \quad (i, j = 1, 2), \quad (5)$$

где  $a_{ij} = \sigma_{i\beta, \beta} - \sigma_{ij,j}$ ;  $\lambda_{ij} = \sqrt{\gamma_{ij}}$ ;  $b_{ij} = \gamma_{33} (v_{\beta, \beta} - v_{i,j}) \delta_{ij} + \gamma_{ji} v_{j,i} (1 - \delta_{ij})$ .

Переходя от частной производной к полной по времени из условия существования решения полученной системы определяем дифференциальное уравнение бихарактеристик и условия на них:

$$dx_j = \pm \lambda_{ij} dt \quad (i, j = 1, 2), \quad (6)$$

$$d\sigma_{ij} \mp \lambda_{ij} dv_i = (b_{ij} \mp \lambda_{ij} [a_{ij} + F_i]) dt \quad (i, j = 1, 2). \quad (7)$$

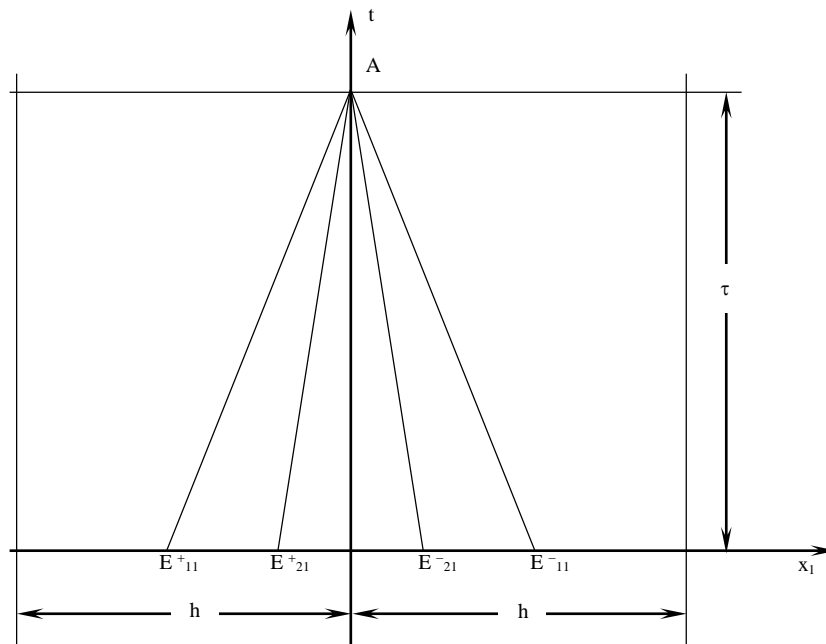


Рис. 2. Вид бихарактеристик на плоскости  $x_2=const$ .

**Разрешающие разностные уравнения.** Интегрирование методом трапеции уравнения (4) от точки  $O$  до точки  $A$  и соотношений (7) от точки  $E^{\pm}_{ij}$  до точки  $A$  позволяют получить выражения следующего вида:

$$\begin{cases} v_i = v_i^0 + \frac{\tau}{2}(\sigma_{ij,j} + a_{ij} + F_i + \sigma_{ij,j}^0 + a_{ij}^0 + F_i^0), \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \frac{\tau}{2}(\lambda_{ij}^2 v_{i,j} + b_{ij} + \lambda_{ij}^2 v_{i,j}^0 + b_{ij}^0), \end{cases} \quad (8)$$

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\pm} \mp \lambda_{ij}(v_i - v_i^{\pm}) = \frac{\tau}{2}(b_{ij} + b_{ij}^{\pm} \mp \lambda_{ij}[a_{ij} + a_{ij}^{\pm} + F_i + F_i^{\pm}]). \quad (9)$$

Исключая из (9) функции  $\sigma_{ij}$ ,  $v_i$  при помощи (9), и значения функций  $\sigma_{ij}^{\pm}$ ,  $v_i^{\pm}$  и производных  $a_{ij}^{\pm}$ ,  $b_{ij}^{\pm}$  в не узловых точках разложив по формуле Тейлора в ближней узловой точке с точностью до второго и первого порядка, соответственно, относительно шага  $\tau$ , можно получить:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} \mp \lambda_{ij} v_{i,j} &= \\ &= \sigma_{ij,j}^0 + \tau[\lambda_{ij}^2 v_{i,jj}^0 + b_{ij,j}^0] + F_i^{\pm} - F_i^0 \mp \lambda_{ij}(v_{i,j}^0 + \tau[\sigma_{ij,jj}^0 + a_{ij,j}^0]) \end{aligned} \quad (10)$$

Складывая и вычитая каждое уравнение системы (10) с одинаковыми парами индексов, можно установить:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \sigma_{ij,j}^0 + \tau[\lambda_{ij}^2 v_{i,jj}^0 + b_{ij,j}^0] + \frac{1}{2}(F_i^- + F_i^+ - 2F_i^0) \\ v_{i,j} &= v_{i,j}^0 + \tau[\sigma_{ij,jj}^0 + a_{ij,j}^0] + \frac{1}{2\lambda_{ij}}(F_i^- - F_i^+) \end{aligned} \quad (11)$$

Порядок получения разностных уравнений для внутренних точек таков:

Производные функции в правой части системы уравнений (8) и (11) по квадратной сетке для узла  $O(x^0_1, x^0_2, t_0)$ , лежащего внутри исследуемой области, определяют центральными разностями; производные  $\sigma_{ij,j}, v_{i,j}, a_{ij}, b_{ij}$  на искомом слое  $(t=t_0+\tau)$  в уравнении (8) определяют из системы уравнений (11). Найденные значения, подставляя в уравнения (8) определяют значения неизвестных функции на искомом слое времени  $t=t_0+\tau$ . Разностные уравнения для отыскания решения в граничных точках исследуемой области на слое  $t=t_0+\tau$  получаются с помощью системы уравнений (8), (10) и граничных условий. В расчетах из уравнения (10) не могут быть использованы два условия на двух характеристиках, не принадлежащих области  $D$ , их заменяют граничные условия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеева Л.А., Сарсенов Б.Т.** Дифракция упругих волн в полуплоскости с упругим поверхностным включением [Текст] // Тезисы докладов Междунар. конф. «Современные проблемы прикладной математики, механики», Новосибирск, 2011. – С. 102-102
2. **Алексеева Л.А., Сарсенов Б.Т.** Дифракция нестационарных волн в упругой полуплоскости с поверхностным включением при сбросе напряжений на трещине [Текст] // Математический журнал. Алматы– 2012.– Т.12, № 2(44).–С.23-42.
3. **Дуйшеналиев Т.Б., Сарсенов Б.Т.** О динамике наземного сооружения в эпицентре землетрясения и вдали от него [Текст] // Материалы X междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы современных наук - 2014». -Премзел (Польша), 2014. -Том 23. - С. 48-50.
4. **Дуйшеналиев Т.Б., Сарсенов Б.Т.** Об одной математической модели динамики наземного сооружения [Текст] // Уральский научный вестник. Серия Строительство и архитектура. Физика. Математика. № 24 (103). Урал, 2014. – С. 55-66.
5. **Дуйшеналиев Т.Б., Сарсенов Б.Т.** Моделирование динамики наземного сооружения при землетрясении [Текст] // Известия КГТУ им. И.Раззакова, Бишкек, 2014, – №32 (Часть II), – С.116–120.

ВЕСТНИК МЕЖДУНАРОДНОЙ АССОЦИАЦИИ ЭКСПЕРТОВ ПО СЕЙСМОСТОЙКОМУ  
СТРОИТЕЛЬСТВУ